Diseguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Lemma 1. *Per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ si ha*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{\frac{d}{d-1}}\,dx\right)^{\frac{d-1}{d}} \le \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|\,dx.$$

Proof. In dimensione 2, abbiamo le disuguaglianze

$$\varphi(x,y) \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla\varphi|(x,t)\,dt \qquad \text{e} \qquad \varphi(x,y) \le \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla\varphi|(s,y)\,ds.$$

In questo modo

$$\varphi^2(x,y) \le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla\varphi|(x,t)\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla\varphi|(s,y)\,ds\right).$$

Integrando in x e in y, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^2(x,y)\,dx\,dy \le \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\varphi|(x,y)\,dx\,dy\right)^2.$$

In dilmensione $d > 2$ la dimostrazione è analoga. □

Lemma 2. *Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ e $1 < p < d$. Allora,*

$$\left(\int \varphi^{\frac{pd}{d-p}}\,dx\right)^{\frac{d-p}{pd}} \le C_{d,p}\left(\int |\nabla\varphi|^p\,dx\right)^{1/p},$$

dove

$$C_{d,p} = \left(\frac{p(d-1)}{d-p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Proof. Applicare il lemma precedente alla funzione φ^α dove α è una costante da scegliere opportunamente. □

Teorema 3 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Sia $d \ge 3$. Esiste una costante dimensionale C_d tale che*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} u^{2^*}\,dx\right)^{1/2^*} \le C_d\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2},$$

dove

$$2^* = \frac{2d}{d-2}.$$

Proposizione 4 (Una disuguaglianza in dimensione due)**.** *Per ogni $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ si ha*

$$\|u\|_{L^4} \le \sqrt{2}|\{u \ne 0\}|^{1/4}\|\nabla u\|_{L^2}.$$

In particolare, se $u \in H_0^1(\Omega)$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto di misura finita, allora

$$\|u\|_{L^4} \le \sqrt{2}|\Omega|^{1/4}\|\nabla u\|_{L^2}.$$

Proof. Per esercizio. □

Due corollari

Teorema 5 (Disuguaglianza di Poincaré in domini di misura finita)**.** *Sia Ω un aperto di musura finita in $\mathbb{R}^d$. Allora, esiste una costante dimensionale C_d tale che*

$$\int_\Omega u^2\,dx \le C_d|\Omega|^{2/d}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \qquad \textit{per ogni} \qquad u \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema 6 (Teorema di Rellich per domini di misura finita)**.** *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$. Se u_n è una sottosuccessione limitata di $H_0^1(\Omega)$, allora esistono una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ ed una sottosuccessione di u_n (che indichiamo ancora con (u_n)) tali che:*

- *u_n converge a u debole H^1;*
- *u_n converge a u forte L^2;*
- *$u_n(x)$ converge a $u(x)$ per quasi-ogni $x \in \mathbb{R}^d$.*

Proof. In ogni dimensione $d \geq 2$ consideriamo una funzione $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞ a supporto in B_2 tale che:

$$\phi = 1 \quad \text{in} \quad B_1 \ , \qquad 0 \leq \phi \leq 1 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \ .$$

Definiamo la costante

$$\|\nabla \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = C_d$$

e osserviamo che C_d è una costante dimensionale.

Per ogni $R > 0$ definiamo la funzione

$$\phi_R(x) = \phi\big(x/R\big).$$

Allora,

$$\phi = 1 \quad \text{in} \quad B_R \ , \qquad 0 \leq \phi_R \leq 1 \quad \text{in} \quad B_{2R} \setminus B_R \ , \qquad \phi = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^d \setminus B_{2R} \ , \qquad \|\nabla \phi_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_d}{R} \ .$$

Ora stimiamo la differenza

$$\|u_n - \phi_R u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

In dimensione $d \geq 3$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\|u_n - \phi_R u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\Omega \setminus B_R} |(1-\phi_R)u_n|^2\,dx &\leq |\Omega \setminus B_R|^{2/d} \left(\int_{\Omega \setminus B_R} |(1-\phi_R)u_n|^{\frac{2d}{d-2}}\,dx\right)^{\frac{d-2}{d}} \\
&\leq |\Omega \setminus B_R|^{2/d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(1-\phi_R)u_n|^{\frac{2d}{d-2}}\,dx\right)^{\frac{d-2}{d}} \\
&\leq C_d |\Omega \setminus B_R|^{2/d} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla((1-\phi_R)u_n)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Ora siccome

$$\begin{aligned}
\big\|\nabla\big((1-\phi_R)u_n\big)\big\|_{L^2} &\leq \big\|u_n \nabla \phi_R\big\|_{L^2} + \big\|(1-\phi_R)\nabla u_n\big\|_{L^2} \\
&\leq \|\nabla \phi_R\|_{L^\infty} \|u_n\|_{L^2} + \|\nabla u_n\|_{L^2} \\
&\leq \frac{C_d}{R} \|u_n\|_{L^2} + \|\nabla u_n\|_{L^2} \\
&\leq 2\|\nabla u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

per R abbastanza grande, otteniamo

$$\|u_n - \phi_R u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_d |\Omega \setminus B_R|^{1/d} \|\nabla u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

In dimensione $d = 2$ abbiamo una stima analoga. Infatti,

$$\begin{aligned}
\|u_n - \phi_R u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^d} |(1-\phi_R)u_n|^2\,dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla((1-\phi_R)u_n)|\,dx\right)^2 \\
&= \left(\int_{\Omega \setminus B_R} |\nabla((1-\phi_R)u_n)|\,dx\right)^2 \\
&\leq |\Omega \setminus B_R| \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla((1-\phi_R)u_n)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Di nuovo, per $R >> 1$, abbiamo

$$\big\|\nabla\big((1-\phi_R)u_n\big)\big\|_{L^2} \leq 2\|\nabla u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)},$$

e quindi la disuguaglianza

$$\|u_n - \phi_R u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_d |\Omega \setminus B_R|^{1/d} \|\nabla u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)},$$

è valida in ogni dimensione $d \geq 2$.

Ora, siccome la successione $\phi_R u_n$, $n \geq 1$, è limitata per ogni $R > 1$, applichiamo il teorema di Rellich per domini limitati e otteniamo che per ogni R possiamo estrarre una successione convergente. La tesi segue da un argomento di successione diagonale. □

Corollario 7 (Esistenza di soluzioni in domini illimitati)**.** *Sia Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^d$ e sia $f \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un'unica soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ del problema*

$$-\Delta u = f \quad \textit{in} \quad \Omega \ , \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$